Matrizen und Determinanten

1. Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe, warum die falschen Aussagen falsch sind.

1 Für A, $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{Det}(A+B) = \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(B)$.

2 Für A, $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A) \cdot \mathrm{Det}(B)$.

3 Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar, so ist $\mathrm{Det}(A) \neq 0$.

4 Für $A \in \mathrm{M}_{6\times 4}(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- **a** A hat vollen Rang
- **b** $\mathrm{Rg}(A) = 6$

5 Für $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^t)$.

2. Aufgabe:

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Berechne die Determinante der Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Finde eine rekursive Formel für $\mathrm{Det}(A)$.

3. Aufgabe:

Für welche $a \in R$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimme in dem Fall die inverse Matrix von A! Gib außerdem den Rang von A in Abhängigkeit von a an.

4. Aufgabe:

Berechne alle möglichen Produkte und Summen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

.
Zeige, dass

$$(I_3 - A)^{-1} = \frac{1}{1-2pq} \begin{pmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{pmatrix}.$$

Abbildungsmatrizen

1. Aufgabe:

Gegeben seien die geordneten Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{B} := ((1,0,1),(0,-1,0),(2,1,0))\,,\hat{C} := ((1,1),(1,-1)) \text{ und } \hat{D} := ((1,-2),(0,1))\,.$$

a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{C})$ für die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch:

$$\text{Für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ sei } (x,y,z)^\alpha := (4x+y-2z,-y+z).$$

b) Bestimme die Basiswechselmatrix von $\hat{C}$ nach $\hat{D}$.

c) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{D})$ möglichst effizient.

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} := (b_1,b_2,b_3)$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch

$$\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{B}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Was ist $(2b_1+b_3)^\alpha$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist α injektiv? Für welche ist α surjektiv?

c) Bestimme $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Kern}(\alpha))$ und $\dim_{\mathbb{R}^3}(\mathrm{Bild}(\alpha))$ für $a \neq 0$.

d) Gib ein konkretes Beispiel für einen 1-dimensionalen α-invarianten $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$ an.

3. Aufgabe:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\hat{B}$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Gib jeweils ein Gegenbeispiel an, das die Aussage widerlegt, oder Sätze aus der Vorlesung an, die die Aussage bestätigen.

☐ α ist genau dann bijektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{B})$ invertierbar ist.

☐ α ist genau dann injektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{B})$ vollen Rang hat.

☐ Falls $\mathcal{M}(\alpha,\hat{B},\hat{B})$ invertierbar ist, gilt $\dim_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{Kern}(\alpha))=\dim_{\mathbb{R}^n}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

4. Aufgabe:

Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Gibt es ein $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ und eine geordnete Basis $\hat{B}$ des $\mathbb{R}^3$ so, dass $A = \mathcal{M}(\varphi,\hat{B},\hat{B})$ ist?
Falls so ein φ existiert, dann wähle eine Basis $\hat{B}$ und gib eine Funktionsvorschrift für φ an.

Lineare Gleichungssysteme

1. Aufgabe:

Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b := (1, 1, 1)$.

a) Schreibe das Gleichungssystem in die Form $x * A = d$ um und kennzeichne die Koeffizientenmatrix, den Ergebnisvektor und den Variablenvektor jeweils mit blau, rot und grün.

b) Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix A^* hin. Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen ohne sie explizit zu berechnen? Ist sie leer, enthält sie eins oder mehrere Elemente?

c) Nun einmal andersherum:
Schreibe das Gleichungssystem $x * B = b$ mit einzelnen Gleichungen und Variablen x_1, x_2, x_3 hin.

d) Bestimme nun für das Gleichungssystem aus (c) die Lösungsmenge, indem du eine Lösung errätst und dann mit dem dazugehörigen HLGS weiter machst.

2. Aufgabe:

Vervollständige die Koeffizientenmatrix $A := \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & & 4 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem $x * A = (1, 2, 1)$

a) genau eine Lösung hat.

b) unlösbar ist.

c) unendlich viele Lösungen hat.

3. Aufgabe:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $d := (a, 6, 0)$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

4. Aufgabe:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $d := (1, 2, 1)$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

5. Aufgabe:

Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständige Lösungsmenge des LGS.

6. Aufgabe:

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (0, 1, 0)$ sagen?

b) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (1, 0, 1)$ sagen?

c) Gibt es einen Vektor $d \in \mathbb{R}^3$, für den das LGS $x * B = d$ genau eine Lösung hat?

7. Aufgabe:

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$.

a) Ist die Lösungsmenge des LGS ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$?

b) Falls die Lösungsmenge ein $\mathbb{R}$-Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

8. Aufgabe:

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (1, 4)$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Eigenwerte*)

Seien immer K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Berechne jeweils $\mathrm{Spek}(\varphi)$.

a) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und für alle $(a, b, c) \in V$ ist $(a, b, c)^\varphi := (c, b, a)$.

b) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und φ ist gegeben durch $(1, 0, 0)^\varphi = (3, 1, 0)$, $(0, 1, 0)^\varphi = (0, 4, 0)$ und $(0, 0, 1)^\varphi = (4, 0, 0)$.

c) $K = \mathbb{R}, \dim_K(V) = 3$, $\hat{B}$ ist eine geordnete Basis von V und φ ist gegeben durch

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Welche Eigenwerte hat φ aus c), wenn $K = \mathbb{C}$ ist?

2. Aufgabe: (*Eigenräume, Diagonalisierbarkeit*)

Sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\varphi \in \mathrm{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne alle Eigenräume von φ. Ist φ diagonalisierbar? Ist φ bijektiv?

b) Sei nun $\alpha \in \mathrm{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis. Zeige, dass α diagonalisierbar ist, bestimme alle Eigenräume und finde eine geordnete Basis $\hat{D}$ so, dass $M(\alpha, \hat{D}, \hat{D})$ eine Diagonalmatrix ist. Ist α bijektiv?

3. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Es sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Entscheide in jedem Fall, ob φ diagonalisierbar ist oder nicht oder ob man keine Aussage treffen kann.

a) $P_\varphi = (x-1)(x-2)(x-10)$

b) $P_\varphi = (x-1)^2 \cdot x$.

c) $P_\varphi = (x-1)^2 \cdot x$ und $\dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, 1)) = 2$.

d) $P_\varphi = (x^2+1) \cdot (x-5)$.

e) $\mathrm{Spek}(\varphi) = \{-1, 0\}$ und $\dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, -1)) = \dim_{\mathbb{R}}(Eig(\varphi, 0)) = 1$.

4. Aufgabe: (*Spektralzerlegung*)

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis.

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume vom φ. Ist φ diagonalisierbar?

b) Es seien U_1 und U_2 die Eigenräume bezüglich φ. Gib eine Abbildungsvorschrift für die Projektionen π_1 auf U_1 und π_2 auf U_2 an.

Zusammenhänge und Beweise

1. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen kurz!

a) Seien K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von α. Dann ist λ^2 ein Eigenwert von α^2.

b) Seien K ein Körper, n eine natürliche Zahl und V und W seien n-dimensionale $K-$Vektorräume. Weiter sei $\hat{B}$ eine geordnete K-Basis von V und $\hat{C}$ eine geordnete K-Basis von W. Wie in Satz 5.5. ordne Φ^{-1} jeder Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ eine K-lineare Abbildung aus $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ zu. Zeige, dass $\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) = \dim_K(\mathrm{Kern}((A^t)^{\Phi^{-1}})$ gilt.

Anders ausgdrückt: Der Kern der zu A gehörenden linearen Abbildung hat die gleiche Dimension wie der Kern der zu A^t gehörenden linearen Abbildung.

c) Sei A eine $n \times m-$Matrix mit Einträgen aus dem Körper K. Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $x * A = 0_{K^m}$. Ist y eine Lösung des HLGS, so ist auch $y + y$ eine Lösung.

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} = ((1,1,0),(1,2,0),(0,0,-2))$ eine geordnete $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\hat{C} = ((1,0,0,0),(0,2,2,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,2))$ eine geordnete $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten eine Abbildung $\alpha : M_{3\times 4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ wie folgt: Es sei $\varphi_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4)$ die Abbildung, für die gilt: $M(\varphi_A,\hat{B},\hat{C}) = A$. Dann sei $A^\alpha = (1,1,0)^{\varphi_A}$.

a) Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne M^α.

b) Begründe, warum es sich bei α um eine wohldefinierte Abbildung handelt und zeige, dass α ein Vektorraumhomomorphismus ist.

c) Ist α surjektiv? Ist α injektiv? Widerlege oder beweise!

d) Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat eine Abbidungsmatrix zu α? Wähle geeignete Basen und berechne die Einträge der ersten Zeile der Abbildungsmatrix. Gib Eigenschaften der Abbildungsmatrix an, ohne sie konkret zu berechnen!

e) Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge der Kern von α oder isomorph dazu ist.